RELATIVITÄTSTHEORIE

Zeitdilatation

In der folgenden Animation wird nun ***eine*** Periode der Lichtuhr, die sich in einem Raumschiff befindet, aus verschiedenen Positionen beobachtet:

a) von einem im Raumschiff mitfliegenden Astronauten (Eigensystem S')

b) von einer auf der Erde befindlichen Beobachterin (System S) an der das Raumschiff mit der konstanten Geschwindigkeit v vorbeifliegt

Hinweise:

- Die Vorgänge sind gegenüber der oberen Animation verlangsamt dargestellt.
- Die Überlegungen werden allgemein durchgeführt, d.h. für den Abstand h der Spiegel in der Lichtuhr wird keine spezieller Wert verwendet.

Zeitdilatation

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

Ergänzendes Material zum Thema bei **Welt der Physik**
> Die Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie

Weiterführende Artikel

>

Gleichzeitigkeit

Gleichzeitigkeit von Ereignissen

Gleichzeitigkeit von Ereignissen in einem Inertialsystem, die sich an verschiedenen Orten A und B befinden

Zwei Ereignisse an verschiedenen Orten A und B eines Inertialsystems sind gleichzeitig, wenn sie von Lichtstrahlen ausgelöst werden können, die im gleichen Augenblick von einem Punkt ausgehen, der in der Mitte von A und B liegt.

Relativität der Gleichzeitigkeit

Finden in einem Inertialsystem zwei Ereignisse an verschiedenen Orten **gleichzeitig** statt, so finden diese Ereignisse in einem dazu bewegten Inertialsystem zu **verschiedenen Zeiten**statt.

Weiterführende Artikel

>

Längenkontraktion

In der Musteraufgabe "**Fahrt zu α-Centauri**" dauert die gleichförmige Fahrt für den auf der Erde sitzenden Beobachter Δt = 5,4 Jahre, für den mitfliegenden Astronauten jedoch nur Δt' = 3,2 Jahre. Beide (Erdbewohner und Astronaut) gehen von der gleichen Relativgeschwindigkeit v = 0,8·c aus.

Der Erdbewohner schreibt:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} (1)$$

Der Astronaut schreibt:

$$v = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} (2)$$

Setzt man (1) und (2) gleich, so erhält man:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x' = \Delta x \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t}$$

mit der Formel für die Zeitdilatation folgt:

$$\Delta x' = \Delta x \cdot \frac{\Delta t \cdot \sqrt{1} \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1} \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Der Astronaut muss also für die Entfernung Erde - Alpha-Centauri von einer kürzeren Strecke ausgehen. Man spricht von der **Längenkontraktion**.

Die Längenkontraktion

Bewegt sich ein Beobachter an einer Strecke der Länge Δx mit der Geschwindigkeit v vorbei, so ist die Strecke für ihn auf den Wert Δx' verkürzt (**Längenkontraktion**):

$$\Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Hinweis: Die Längenkontraktion findet nur in Bewegungsrichtung statt. Strecken senkrecht zur Bewegungsrichtung behalten ihre Länge auch für den bewegten Beobachter bei.

Die Verhältnisse für den Flug von der Erde zu Alpha-Centauri sind in den folgenden Bildern illustriert:

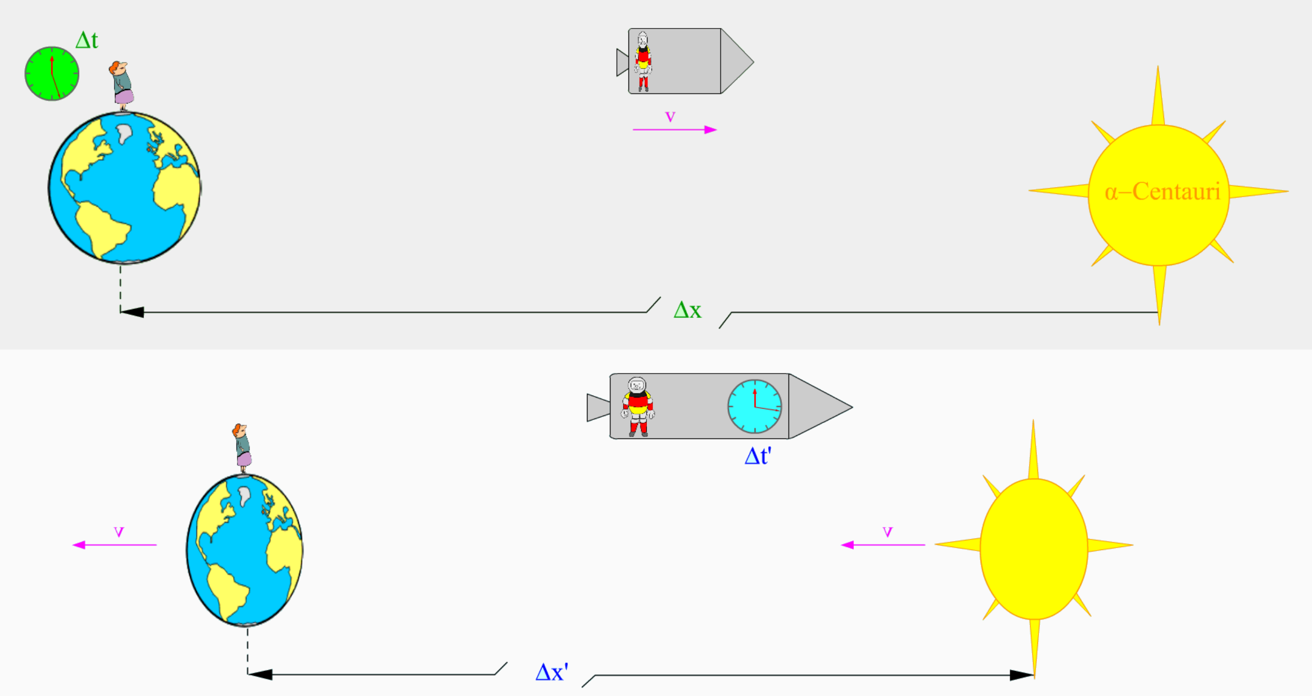


Abb: 1 Das obere Bild zeigt, wie ein Erdbewohner beobachtet: Er stellt für die Entfernung der Himmelskörper die Strecke Δx fest und misst als Zeitspanne zwischen den Ereignissen "Start" und "Ankunft" die Zeit Δt (Ablesung an räumlich verschiedenen Uhren). Die Rakete würde der Erdbewohner verkürzt wahrnehmen. Das untere Bild zeigt, wie ein mitfliegender Astronaut beobachtet: Er stellt für die Entfernung der Himmelskörper die Strecke Δx' < Δx fest und misst als Zeitspanne zwischen den Ereignissen "Start" und "Ankunft" die Zeit Δt' < Δt (Ablesung an einer Uhr). Die Erde sieht der Astronaut in Bewegungsrichtung geschrumpft.

Weiterführende Artikel

>

Relativistische Energie

Historisches: In seiner **Arbeit aus dem Jahre 1905** stellt EINSTEIN in der Überschrift die Frage: "Ist die Trägheit (Anm.: Masse) eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?" Diese Arbeit können Sie kurz betrachten. Sie behandelt zunächst ein Spezialproblem, nämlich die Emission von Strahlung. Am Ende kommt jedoch EINSTEIN zu der folgenden Verallgemeinerung:

> Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um L (ΔE), so ändert sich die Masse (Δm) in demselben Sinne um $L/9.10^{20}$ ($\Delta E/c^2$), wenn die Energie in Erg und die Masse in Grammen gemessen wird.
>
> Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei Körpern, deren Energieinhalt in hohem Maße veränderlich ist (z. B. bei den Radiumsalzen), eine Prüfung der Theorie gelingen wird.

Hinweise

- Hinter die von EINSTEIN benutzten Größen sind zu Ihrer leichteren Orientierung die heute üblichen Größen rot eingetragen.
- Erg ist eine ältere, heute kaum noch benutzte Energieeinheit.
- Die Lichtgeschwindigkeit wurde von EINSTEIN häufig in der Einheit cm/s angegeben.
- Im unteren Abschnitt äußert sich EINSTEIN schon über ein Experiment mit Radiumsalzen (dies waren die zu seiner Zeit üblichen Stoffe die Strahlung aussandten und Kernreaktionen eingingen), dass zu einer Prüfung der Theorie dienen könnte.
- In dem kurzen Ausschnitt von EINSTEINs Originalarbeit wird die Tatsache ausgedrückt, welche Sie in der Mittelstufe schon zur Berechnung von Bindungs- und Reaktionsenergien benutzt haben: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$

Die Überlegungen EINSTEINs führten schließlich dazu, dass er ein Proportionalität zwischen der dynamischen Masse m(v) und der relativistischen Gesamtenergie E herleiten konnte. Es gilt:

Relativistische Gesamtenergie

$$E = m(v) \cdot c^2$$

Dabei ist E: Relativistische Gesamtenergie eines Körpers, m(v): Dynamische Masse eines Körpers und c: Vakuumlichtgeschwindigkeit

Über diese fundamentale Beziehung sind Masse und Energie miteinander verknüpft, man spricht auch von der **Äquivalenz von Masse und Energie**. In dem für einen breiten, interessierten Leserkreis geschriebenen **Artikel** erläutert Einstein, wie durch obige Beziehung die Erhaltungssätze für Masse und Energie zu einem einzigen umfassenden Erhaltungssatz verschmelzen. Eine tragfähige Herleitung dieser berühmten Formel setzt die Integralrechnung voraus, deshalb haben wir an dieser Stelle darauf verzichtet.

Ruheenergie

Nach der obigen Beziehung ist auch einem Körper mit der Geschwindigkeit Null eine Energie zuzuordnen, die man als Ruheenergie E_0 bezeichnet:

$$E(v) = m(v) \cdot c^2 \Rightarrow E(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot c^2 \quad und\ für\ \ v = 0 \quad E(0) = m_0 \cdot c^2$$

$$E_0 = m_0 \cdot c^2$$

Kinetische Energie

Je schneller ein Körper bewegt wird, desto größer ist seine dynamische Masse und damit seine Gesamtenergie. Die kinetische Energie des Körpers ist die Differenz zwischen dessen Gesamtenergie und Ruheenergie:

$$E_{kin} = E(v) - E_0 \Rightarrow E_{kin} = m(v) \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 \Rightarrow E_{kin} = (m(v) - m_0) \cdot c^2$$

Vertrauensbildende Maßnahme: Nichtrelativistische Näherung für die kinetische Energie

In der Mathematik kann man bei den Reihenentwicklungen lernen, dass für kleine x (d.h. x << 1) gilt: $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot x$. Diese Näherung soll nun auf den relativistisch korrekten Ausdruck für die kinetische Energie angewandt werden, wobei x durch den Quotienten aus v und c ersetzt wird.

$$E_{kin} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 \Rightarrow E_{kin} \approx m_0 \cdot c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) - m_0 \cdot c^2 \Rightarrow E_{kin} \approx \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$$

Dies bedeutet, dass für $\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow v \ll c$ die Beziehung für die relativistisch korrekt berechnete kinetische Energie in die wohlvertraute Formel für die kinetische Energie in der klassischen Physik übergeht.

Hinweis auf einen häufigen Fehler

Manche Schüler meinen bei der Berechnung der kinetischen Energie der Relativitätstheorie Genüge zu tun, wenn sie in der klassischen Formel $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ die Masse durch die dynamische Masse m(v) ersetzen. Wie Sie leicht überprüfen können, kommt man damit nicht auf die obige, korrekte Beziehung für die kinetische Energie.

Verständnisaufgabe

Berechne für Elektronen (Ruhemasse $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$kg) die Ruheenergie in eV.

Lösung einblenden

Bestimme die kinetische Energie von Elektronen (in eV) für folgende Werte von v/c: 0,300; 0,600; 0,800; 0,900; 0,950; 0,990. Stelle v in Abhängigkeit von der kinetischen Energie in einem E_{kin}-v-Diagramm dar.

Lösung einblenden

Verständnisaufgabe

Bestimme rechnerisch die Geschwindigkeit eines Elektrons, das eine Beschleunigungsspannung von 800kV durchlaufen hat.

Lösung einblenden

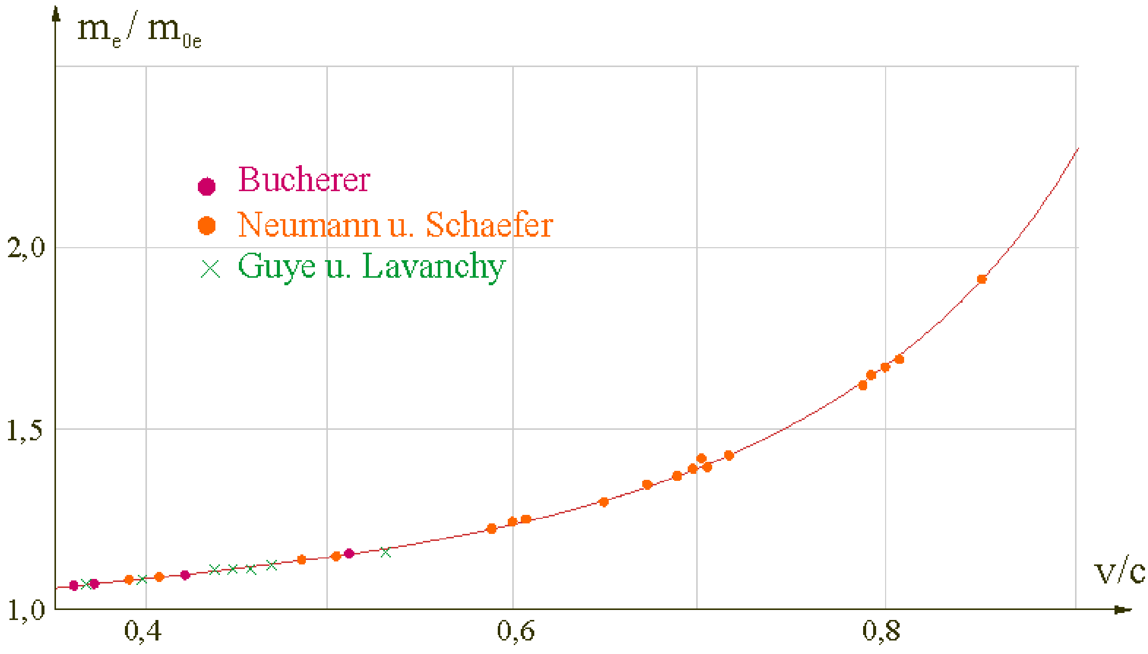
Weiterführende Artikel

>

Relativistische Masse und Impuls

Mit dem **Versuch von BUCHERER** kann nachgewiesen werden, dass die "dynamische" Masse von schnellen Teilchen mit der Geschwindigkeit zunimmt:

$$m_{\text{dyn}} = m(v)$$



Versuchsergebnisse verschiedener Autoren mit schnelle Elektronen

Bezeichnet man mit m_0 die Ruhemasse[1] eines Teilchens, so lässt sich aus den Versuchen die folgende Beziehung für die **dynamische Masse** ableiten:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Dabei ist m(v): Geschwindigkeitsabhängige Masse (dynamische Masse), m_0: Ruhemasse und v: Teilchengeschwindigkeit

[1]Die Ruhemasse m_0 eines Teilchens wird von einem Beobachter festgestellt, der in Bezug auf das Teilchen in Ruhe ist und in einem Inertialsystem als ruhend beschrieben werden kann.

Die Beziehung für den **Impuls p,** für den Sie aus der klassischen Mechanik den Ausdruck p = m·v kennen, wird in der speziellen Relativitätstheorie beibehalten. Allerdings setzt man für die Masse die dynamische Masse ein.

$$p = m(v) \cdot v \Rightarrow p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot v$$

[1]Die Ruhemasse m_0 eines Teilchens wird von einem Beobachter festgestellt, der in Bezug auf das Teilchen in Ruhe ist und sich in einem Inertialsystem befindet.

Herleitung

Wenn du daran interessiert bist, wie sich obige Beziehung aus den Einsteinschen Postulaten ableiten lässt (wir wählen dazu ein einfaches Beispiel), so kannst du dir diese Herleitung hier ansehen.

Für die Herleitung der relativistischen Massenformel wird der völlig inelastische, zentrale Stoß zweier gleichartiger Teilchen in verschiedenen Inertialsystemen S und S' betrachtet. Wir gehen dabei von den folgenden Postulaten aus:

1. Die Masse der Teilchen ist geschwindigkeitsabhängig: $m_{dyn} = m(|\vec{v}|) = m(v)$
2. Für den Impuls p gilt, ähnlich wie in der klassischen Physik: $\vec{p} = m(v) \cdot \vec{v}$
3. Die Erhaltung der Gesamtmasse (vgl. 1.) und des Gesamtimpulses (vgl. 2.) gilt in allen Inertialsystemen.

Wenn du auch an der algebraischen Herleitung von (6) interessiert bist, so kannst du dir diese Herleitung hier ebenfalls einblenden.

Herleitung einblenden

Mit Hilfe von (5) kann man den Nenner des Bruches bei (6) durch u allein ausdrücken. Es gilt

$$\frac{u}{v} - 1 = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \quad (7)$$

Somit ergibt sich für die dynamische Masse ((7) in (6) einsetzen)

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

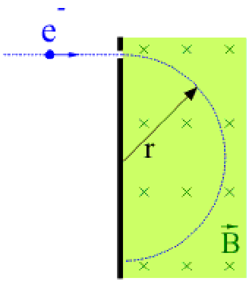
Verständnisaufgabe

Berechne, bei welcher Geschwindigkeit die dynamische Masse dreimal so groß wie die Ruhemasse ist.

Lösung einblenden

Verständnisaufgabe

Elektronen treten senkrecht zu den magnetischen Feldlinien in ein Magnetfeld ($B = 6{,}0 \cdot 10^{-2} \text{Vs/m}^2$), wodurch die Teilchen auf einer Kreisbahn mit dem Radius r = 4,4cm geführt werden.



1. Berechne den Impuls der Elektronen.
2. Zeige, dass sich bei klassischer Rechnung für die Elektronen Überlichtgeschwindigkeit ergeben würde.
3. Ermittle die Elektronengeschwindigkeit unter Berücksichtigung der relativistischen Massenzunahme.

Lösung einblenden

Weiterführende Artikel

>

Energie-Impuls-Beziehung

a) **Klassischer Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Impuls**

Ausgangsbeziehungen:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (1) \qquad\qquad p = m \cdot v \quad (2)$$

Erweiterung der rechten Seite von (1) mit m und Einsetzen von (2) in (1) ergibt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \mid \cdot \frac{m}{m} \Rightarrow E_{kin} = \frac{m^2 \cdot v^2}{2 \cdot m} \text{ und mit (2) } E_{kin} = \frac{p^2}{2 \cdot m}$$

b) **Relativistisch korrekter Zusammenhang zwischen Gesamtenergie, Ruheenergie und Impuls**

Ausgangsbeziehungen:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot c^2 \quad (3) \qquad\qquad p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (4)$$

Ziel: Elimination von v in Gleichung (3). Dazu bildet man den Ausdruck p/E:

$$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} \Rightarrow v = \frac{c^2 \cdot p}{E} \quad (5)$$

Formt man (3) um, so folgt:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot c^2 \Rightarrow E \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = m_0 \cdot c^2$$

Mit (5) ergibt sich:

$$E \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{c^2 \cdot p}{E}}{c}\right)^2} = m_0 \cdot c^2 \Rightarrow E \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c \cdot p}{E}\right)^2} = E_0$$

Quadrieren der Gleichung ergibt dann:

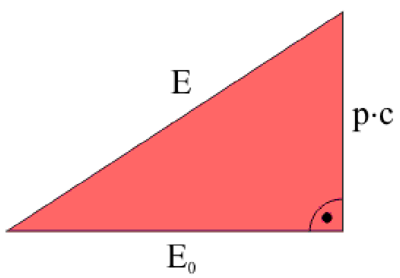
$$E^2 - (c \cdot p)^2 = E_0^2$$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = E_0^2 + (c \cdot p)^2 \Rightarrow E = \sqrt{E_0^2 + (c \cdot p)^2}$$

Dabei ist E die Gesamtenergie, E_0 die Ruheenergie und p der Impuls.

Erinnerungsstütze kann das Energie-Impuls-Dreieck sein:



Hinweis: Für Teilchen mit Ruhemasse $m_0 = 0$ ergibt die Energie-Impuls-Beziehung: E = p·c

Formeln Dynamik

	Teilchen mit Ruhemasse verschieden von Null	Teilchen mit Ruhemasse Null (Photonen)
Masse	$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$	$m = \frac{E}{c^2} \Rightarrow m = \frac{h \cdot f}{c^2}$
Energie	Gesamtenergie	
	$E = m \cdot c^2 \Rightarrow E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$	$E = h \cdot f$
	Ruheenergie	
	$E_0 = m_0 \cdot c^2$	- - -
	Kinetische Energie	
	$E_{kin} = E \quad E_0$	- - -
Impuls	$p = m(v) \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$	$p = m \cdot c = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h}{\lambda}$
Energie-Impuls-Beziehung	$E^2 = E_0^2 + (p \cdot c)^2$	$E = p \cdot c$

Hinweise:

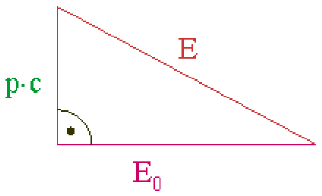
- Die Formel für die relativistisch korrekte Berechnung der kinetischen Energie geht in die klassische Formel durch die folgende Näherung über:

$$E_{kin} = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0\right) \cdot c^2 \qquad \text{mit } k = \frac{v^2}{c^2} \text{ gilt:} \qquad E_{kin} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-k}} - 1\right) \cdot m_o \cdot c^2$$

  Aus der Mathematik ist für k << 1 (d.h. v << c) die folgende Näherung bekannt: $\frac{1}{\sqrt{1-k}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot k$. Mit dieser Näherung ergibt sich:

$$E_{kin} = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1\right) \cdot m_0 \cdot c^2 = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$$

- Um relativistisch korrekt zu rechnen, reicht es nicht in der klassischen Formel für die kinetische Energie nur die Masse durch die geschwindigkeitsabhängige Masse zu ersetzen. Diese Vorgehensweise ist jedoch beim Impuls möglich.
- Die relativistisch korrekte Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = E_0^2 + (p \cdot c)^2$ kann man sich über das untenstehend skizzierte Dreieck - auf welches der Satz des Pythagoras angewandt wird - einprägen.



- Die Energie-Impuls-Beziehung für materielle Teilchen $E^2 = E_0^2 + (p \cdot c)^2$ geht durch Nullsetzen der Ruheenergie in die Energie-Impuls-Beziehung für Photonen über.