Elektromagnetische Wellen

ELEKTRIZITÄTSLEHRE

Ausbreitung Elektromagnetischer Wellen

Weiterführende Artikel

Versuche/Erarbeiten

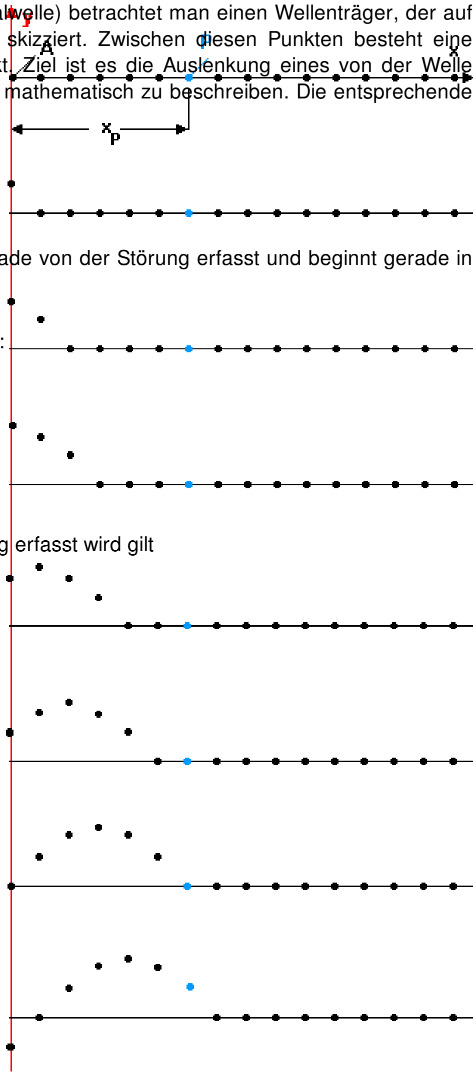
Dipolstrahlung (Animation)

>

Herleitung der Wellenfunktion

Die mathematische Beschreibung einer Welle wird nicht in allen Bundesländern verlangt. Im Folgenden wird die Wellengleichung an einem mechanischen Beispiel erarbeitet und schließlich noch ein Ausblick auf elektromagnetische Wellen gegeben.

Zur Erarbeitung der Gleichung einer ungedämpften, mechanischen Querwelle (Transversalwelle) betrachtet man einen Wellenträger, der auf der x-Achse liegt. Einzelne, gleichabständige Punkte des Trägers sind im rechten Bild skizziert. Zwischen diesen Punkten besteht eine Kopplung. Der im Punkt A liegende Körper werde "sinusförmig" in y-Richtung ausgelenkt. Ziel ist es die Auslenkung eines von der Welle erfassten Teilchens in y-Richtung an einem beliebigen Ort x und zu einer beliebigen Zeit t mathematisch zu beschreiben. Die entsprechende Funktion bezeichnet man als Wellenfunktion.



Im obersten Bild beginnt der Körper A gerade in positive y-Richtung zu schwingen, die anderen Körper sind noch in Ruhe.

Im Bild darunter hat Körper A schon eine gewisse Auslenkung, der zweite Körper wird gerade von der Störung erfasst und beginnt gerade in positive y-Richtung zu schwingen usw.

Die Schwingungsgleichung für den Körper A lautet (f ist die dessen Schwingungsfrequenz):

$$y_{\rm A}(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ mit } \omega = 2\pi \cdot f$$

Aufgrund der Kopplung der Teilchen wandert die Störung mit der Geschwindigkeit c entlang der positiven x-Richtung.

Für die Zeit Δt, die verstreicht, bis der Punkt P in der Entfernung $x_{\rm P}$ erfasst von der Störung erfasst wird gilt

$$\Delta t = \frac{x_{\rm P}}{c} \quad (1)$$

Der Körper P schwingt also um die Zeit Δt verspätet an. Somit gilt für dessen Schwingungsfunktion

$$y_{\rm P}(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot (t - \Delta t)) \quad (2)$$

Setzt man (1) in (2) ein, so folgt:

$$y_{\rm P}(t) = \hat{y} \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x_p}{c}\right)\right)$$

Wählt man an Stelle von P einen beliebigen Punkt mit der Entfernung x vom Ursprung aus, so gilt

$$y(x;t) = \hat{y} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

Die Auslenkung y hängt dann von den beiden Variablen x und t ab. Man bezeichnet die Funktion als die Wellenfunktion.

$$y(x;t) = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{c \cdot T}\right)\right)$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$c = \lambda \cdot f \Leftrightarrow c = \lambda \cdot \frac{1}{T} \Leftrightarrow c \cdot T = \lambda$$

lässt sich die Wellenfunktion in der noch etwas "griffigeren" Form schreiben

$$y(x;t) = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Für eine in die negative x-Richtung laufende Welle gilt:

$$y(x;t) = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Die Wellengleichung als Funktion zweier Variablen ist für Sie wohl etwas ungewohnt. Sie enthält aber in sehr kompakter Form alle Informationen über die Welle.

Was sagt die Wellengleichung über einen Punkt an einem festen Ort x_1 aus? ("vertikale" Betrachtung)

$$y(x_1,t) = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)\right)$$

Die Auslenkung hängt nur noch von t ab. $y(x_1,t)$ zeigt, dass der Punkt am Ort x_1 eine Sinusschwingung ausführt (Sinuslinie im t-y-Diagramm).

Was sagt die Wellengleichung für ein festes t_1 aus? ("horizontale" Betrachtung)

$$y(x,t_1) = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Die Auslenkung hängt nur noch von x ab.$y(x,t_1)$ zeigt, dass eine Momentaufnahme der Welle eine Sinuslinie ergibt (Sinuslinie im x-y-Diagramm).

Ausblick auf die **Gleichungen für eine sinusförmige elektromagnetische Welle** in der Fernzone:

Gleichung für die elektrische Feldstärke:

$$E(x,t) = \hat{E} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Gleichung für die magnetische Flussdichte:

$$B(x,t) = \hat{B} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist gleich der Lichtgeschwindigkeit c.

Aus der Differentialgleichung für die Welle (die hier nicht dargestellt ist) kann man entnehmen, dass der folgende Zusammenhang zwischen der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c der elektrischen Feldkonstanten ε_0 und der magnetischen Feldkonstanten μ_0 besteht:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{A \cdot s}{V \cdot m} \cdot \frac{V \cdot s}{A \cdot m}}} \approx 2,998 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}$$

>

Stehende elektromagnetische Welle (Simulation)

Weiterführende Artikel

>
